# Λύσεις των προβλημάτων του Απριλίου

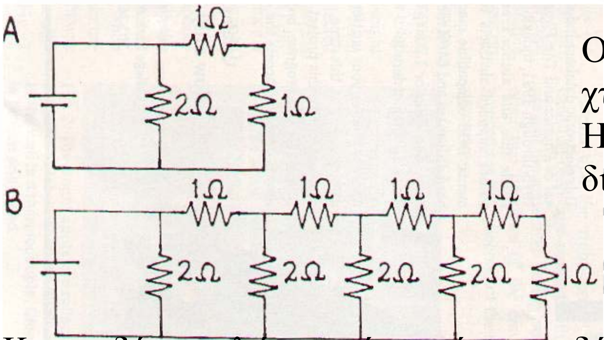
**Α2 : Πιάσε την στέκα !**

Και τα τρία τραπέζια έχουν ίσες μία εκ των πλευρών τους . Εκμεταλλευόμενοι την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων , αναλύουμε την ταχύτητα σε δύο συνιστώσες παράλληλες στις διευθύνσεις των πλευρών . Αν το μήκος της μικρής πλευράς είναι ίσο με **α** τότε ο χρόνος που απαιτείται για να επιστρέψει η μπίλια στην πλευρά αφετηρίας ισούται με $\mathbf{t_\alpha = 2\alpha/v_y}$ , όπου $\mathbf{v_y}$ η συνιστώσα της ταχύτητας που είναι παράλληλη με την πλευρά **α** .

Βλέπουμε ότι ο χρόνος αυτός δεν εξαρτάται από το μήκος της άλλης πλευράς . Έτσι και οι τρεις μπίλιες θα επιστρέψουν **ταυτόχρονα** στην πλευρά αφετηρίας .

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα , για όσους έχουν το … κουράγιο , είναι το εάν οι μπίλιες επιστρέφουν στο σημείο εκκίνησης !

**Βγ2 : Πάρε κόσμε … αντιστάτες .**

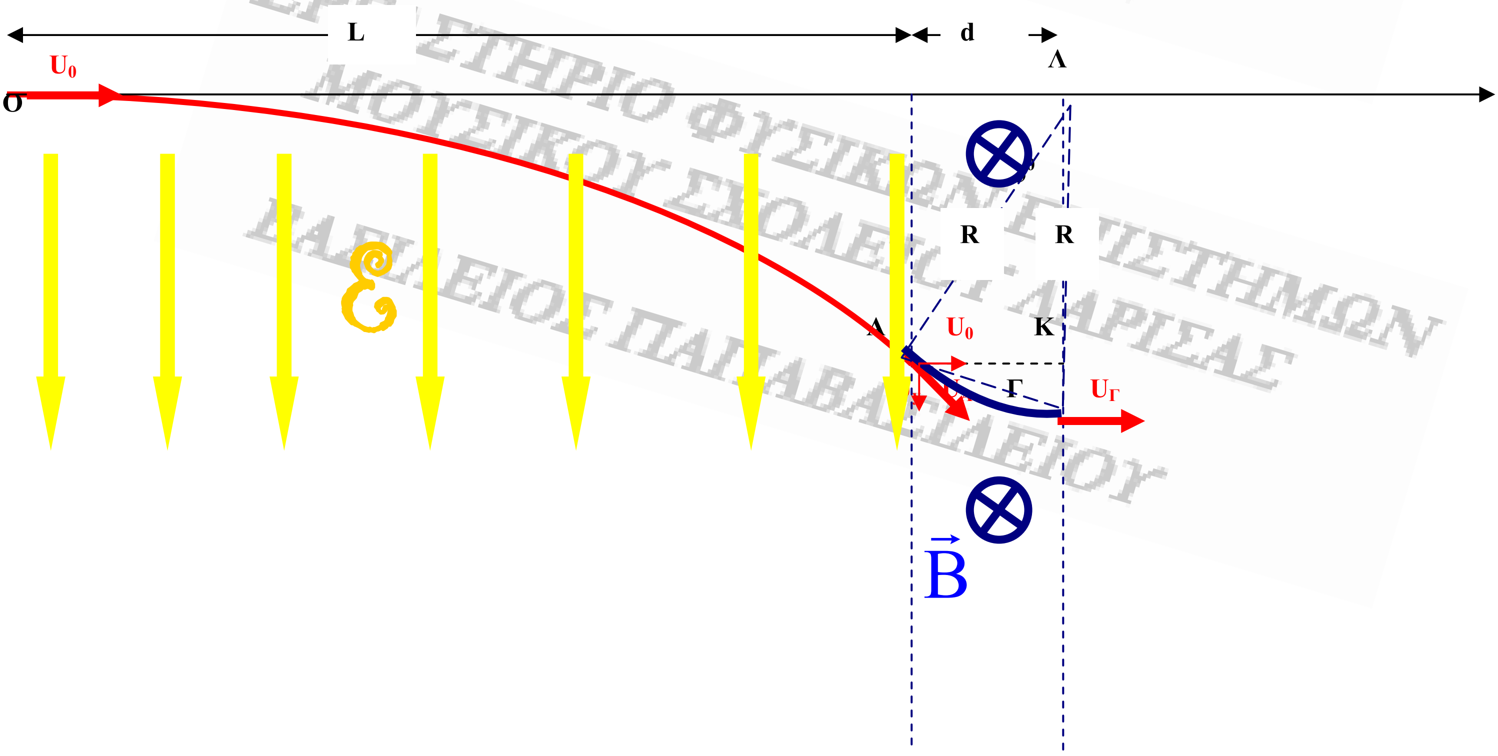



Ο δαίμων του τυπογραφείου χτύπησε και στο … διαδίκτυο ! Η άσκηση συνοδεύονταν από το διπλανό σχήμα .

Υποθέτω ότι χωρίς αυτό το σχήμα δεν θα την έλυσε κανείς .

Και τα δύο κυκλώματα έχουν ίσες ισοδύναμες αντιστάσεις $\mathbf{R_{o\lambda.} = R}$ και έτσι το ηλεκτρικό ρεύμα που διέρχεται από κάθε πηγή έχει την ίδια ένταση $\mathbf{I = E/R_{o\lambda.} = E/R}$ .

**Βκ2 : Ένας φίλος ήρθε απόψε απ' τα παλιά .**



Κίνηση στο ηλεκτρικό πεδίο :
Η κίνηση είναι σύνθετη , ευθύγραμμη ομαλή στη διεύθυνση **xx΄** με ταχύτητα σταθερού μέτρου $\mathbf{U_{xx'} = U_0}$ και ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη στην διεύθυνση **yy΄** με επιτάχυνση ομόρροπη της διεύθυνσης των δυναμικών γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{\varepsilon}$ και μέτρου $\alpha = \frac{F_{\eta\lambda}}{m} = \frac{\varepsilon q}{m}$

Έτσι , αν συμβολίσουμε με $\mathbf{t_\varepsilon}$ το χρόνο κίνησης του σωματιδίου μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο τότε θα ισχύει :

άξονας xx΄ : $x = U_x \cdot t = U_0 \cdot t \Rightarrow L = U_0 \cdot t_\varepsilon \Leftrightarrow t_\varepsilon = \frac{L}{U_0}$ (1)

άξονας yy΄ : $\left.\begin{array}{l} U_y = \alpha \cdot t \Rightarrow U_{y,A} = \alpha \cdot t_\varepsilon \\ y = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 \Rightarrow y_A = \frac{1}{2}\alpha \cdot t_\varepsilon^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y_A}{U_{y,A}} = \frac{t_\varepsilon}{2}$ (2)

Από τις εξ. (1) και (2) παίρνουμε : $y_A = U_{y,A}\frac{t_\varepsilon}{2} = U_{y,A}\frac{L}{2U_O}$ (3)

Μας δίδεται το δεδομένο $K_A = 2K_O \Rightarrow \frac{1}{2}mU_A^2 = 2\,\frac{1}{2}mU_O^2 \Leftrightarrow U_A = \sqrt{2}U_O$
και φυσικά ισχύει $U_A^2 = U_{x,A}^2 + U_{y,A}^2 \Rightarrow 2U_O^2 = U_O^2 + U_{y,A}^2 \Rightarrow U_{y,A} = U_O$
Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην εξ. (3) καταλήγουμε :
$y_A = \frac{L}{2} = \frac{0.2}{2} = 0.1m$

Από το σχήμα φαίνεται ότι , στο σημείο Α , το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται από τις συνιστώσες της ταχύτητας έχει ίσες πλευρές άρα είναι τετράγωνο οπότε η γωνία που σχηματίζει έκαστη συνιστώσα ταχύτητα με την $\mathbf{U_A}$ είναι ίση με π/4 .
Για να βρούμε την απόσταση $\mathbf{y_\Gamma}$ βρίσκουμε πρώτα το κέντρο **Λ** του τόξου που διαγράφει το σωματίδιο μέσα στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ . Το κέντρο είναι η τομή των καθέτων που άγονται από τα σημεία Α και Γ . Η γωνία $K\hat{\Lambda}\Gamma = \pi/4$ αφού οι πλευρές τις είναι κάθετες με τις αντίστοιχες πλευρές που σχηματίζουν οι διευθύνσεις των $\vec{U}_x$ και $\vec{U}_A$ . Από τη γεωμετρία του σχήματος έχουμε ημ(π/4) = d/R ⇔ R = d/ημ(π/4) = 5√2/(√2/2) ⇔ **R = 10cm** (στο σχήμα δεν είναι σχεδιασμένη η ακτίνα με τη σωστή κλίμακα) .
Από το σχήμα και πάλι παίρνουμε :
συν(π/4) = (ΚΛ)/R ⇔ (ΚΛ) = Rσυν(π/4) άρα $\mathbf{y_\Gamma}$ = (ΓΚ) + $\mathbf{y_A}$ = [R – (ΚΛ)] + $\mathbf{y_A}$ =
R[1 – συν(π/4)] + $\mathbf{y_A}$ = 0,1 (1 – √2/2) + 0,1 => $\mathbf{y_\Gamma}$ = **0,1 (2 – √2/2)m ≈ 0,13m** .

β. Το ζητούμενο πηλίκο χρόνων ισούται με :

$$\frac{t_B}{t_{\mathcal{E}}} = \frac{\widehat{A\Gamma}/U_A}{L/U_O} = \frac{U_O}{U_A}\cdot\frac{\widehat{A\Gamma}}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{R\cdot \pi/4}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{10\cdot 10^{-2}\cdot \pi/4}{2\cdot 10^{-1}} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \simeq 0.28$$

γ. Το ερώτημα αυτό πραγματεύεται μια έννοια που τώρα δεν διδάσκεται στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Λυκείου αλλά για λόγους πληρότητας έδωσα κι αυτό το ερώτημα .

Η ώθηση , μιας δύναμης $\vec{F}$ που για χρονικό διάστημα $\Delta t$ , ορίζεται ως $\vec{\Omega}_F = \vec{F}\cdot(\Delta t) = \Delta\vec{p} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda.} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi.}$ , δηλαδή ισούται με τη διαφορά των ορμών του σώματος πριν και μετά τη δράση της $\vec{F}$ . Ο ζητούμενος λόγος θα έχει τιμή :

$$\frac{\Omega_B}{\Omega_{\mathcal{E}}} = \frac{\|\vec{p}_\Gamma - \vec{p}_A\|}{\|\vec{p}_A - \vec{p}_O\|} = \frac{\|m\vec{U}_\Gamma - m\vec{U}_A\|}{\|m\vec{U}_A - m\vec{U}_O\|} = \frac{U_A\sqrt{2\cdot(1-\sigma\upsilon\nu\,\pi/4)}}{\sqrt{U_A^2 + U_O^2 - 2U_AU_O\sigma\upsilon\nu\,\pi/4}} \overset{U_A=\sqrt{2}U_O}{=} \frac{\sqrt{2}U_O\sqrt{2\cdot(1-\sqrt{2}/2)}}{U_O\sqrt{3-2\sqrt{2}\,(\sqrt{2}/2)}} = \sqrt{4-\sqrt{2}}$$

**Γγ2 : Αναπόφευκτες συγκρούσεις** .

Λέγοντας πολύ μεγάλη απόσταση εννοούμε ότι τα σωματίδια , αρχικά , δεν αλληλεπιδρούν – δηλαδή δεν έχει δυναμική ενέργεια το σύστημα πρωτόνιο – άλφα .

Και τα δύο σωματίδια έχουν θετικό ηλεκτρικό φορτίο και έτσι όταν αλληλεπιδράσουν θα απωθούνται . Η κίνησή τους θα είναι επιβραδυνόμενη – το πρωτόνιο ως ελαφρύτερο θα δέχεται μεγαλύτερη επιβράδυνση . Έτσι κάποια στιγμή το πρωτόνιο θα ακινητοποιηθεί , στιγμιαία , ενώ το σωμάτιο άλφα θα συνεχίζει την κίνησή προς το πρωτόνιο . Στην συνέχεια , η άπωση θα επιταχύνει το πρωτόνιο προς την κατεύθυνση της κίνησης του σωματιδίου άλφα . Η πλησιέστερη απόσταση που θα φτάσουν τα δύο σωματίδια θα είναι όταν οι ταχύτητές τους θα αποκτήσουν και πάλι ίσα μέτρα , έστω **u** .

Η αρχή διατήρησης της ολικής ορμής του συστήματος των σωματιδίων θα μας δώσει:

$$\vec{p}_{\pi\rho.,\alpha\rho\chi} + \vec{p}_{\alpha\lambda\phi.,\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\pi\rho.,\tau\varepsilon\lambda.} + \vec{p}_{\alpha\lambda\phi.,\tau\varepsilon\lambda.} \Rightarrow 4m\cdot v - m\cdot v = 4m\cdot u + m\cdot u \Leftrightarrow u = \frac{3v}{5}$$

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας μας δίνει :

$$\frac{1}{2}(4m)\cdot v^2 + \frac{1}{2}m\cdot v^2 = \frac{1}{2}(4m)\cdot u^2 + \frac{1}{2}m\cdot u^2 + k_C\frac{e\cdot(4e)}{r} \Leftrightarrow \frac{5}{2}mv^2 = \frac{5}{2}mu^2 + k_C\frac{4e^2}{r}$$

$$\overset{U=\frac{3V}{5}}{\Rightarrow} k_C\frac{4e^2}{r} = \frac{8mv^2}{5} \Leftrightarrow r = \frac{5k_Ce^2}{2mv^2}$$

**Γκ2 : Φυλάξου απ' τις σειρήνες !**

Έστω $\mathbf{f_1}$ και $\mathbf{f_2}$ οι συχνότητες δύο ακίνητων πηγών ήχου και $\mathbf{V_x}$ η ταχύτητα ενός παρατηρητή που κινείται ομαλά πάνω στη διεύθυνση που ορίζουν οι θέσεις των δύο πηγών . Η ταχύτητα του ήχου έχει μέτρο **u** . Όταν ο παρατηρητής προσεγγίζει τις δύο πηγές τότε οι συχνότητες που αντιλαμβάνεται από κάθε πηγή ισούνται με $f_1' = \frac{u+V_x}{u} f_1$ και

αντίστοιχα $f_2' = \frac{u+V_x}{u} f_2$ με αποτέλεσμα να αντιλαμβάνεται διακρότημα – εάν οι συχνότητες **f΄₁** και **f΄₂** έχουν παραπλήσιες τιμές – συχνότητας

$$f_\delta = \left| f_1' - f_2' \right| = \frac{u+V_x}{u} \left| f_1 - f_2 \right|$$

Εάν ο παρατηρητής απομακρύνεται και από τις δύο πηγές τότε οι συχνότητες που αντιλαμβάνεται έχουν αντίστοιχα τιμές

$f_1'' = \frac{u-V_x}{u} f_1$ και $f_2'' = \frac{u-V_x}{u} f_2$ και το διακρότημα έχει συχνότητα ίση με

$$f_\delta' = \left| f_1'' - f_2'' \right| = \frac{u-V_x}{u} \left| f_1 - f_2 \right|$$

Παρατηρούμε ότι το διακρότημα έχει πάντα μεγαλύτερη συχνότητα κατά την προσέγγιση . Από τα δεδομένα προκύπτει ότι ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται διακρότημα μεγαλύτερης συχνότητας όταν κινείται στα δεξιά των πηγών αρά η φορά κίνησής του είναι από τα δεξιά (προσέγγιση) προς τα αριστερά (απομάκρυνση) .

β. Ισχύει $\frac{f_\delta}{f_\delta'} = \frac{1,01}{0,99} \Rightarrow \frac{u+V_x}{u-V_x} = \frac{1,01}{0,99} \Leftrightarrow V_x = \frac{u}{100}$

γ. Όταν κινείται ο παρατηρητής στο διάστημα ενδιάμεσα των πηγών τότε προσεγγίζει την αριστερή πηγή και απομακρύνεται από την δεξιά . Από την εκφώνηση μας δίνεται ότι τότε δεν αντιλαμβάνεται κανένα διακρότημα . Αυτό συμβαίνει μόνο όταν οι συχνότητες που αντιλαμβάνεται έχουν ίσες τιμές . Επειδή την συχνότητα $\mathbf{f_\alpha}$ την ακούει αυξημένη λόγω προσέγγισης και την συχνότητα $\mathbf{f_\delta}$ την ακούει ελαττωμένη λόγω απομάκρυνσης θα πρέπει να ισχύει $\mathbf{f_\alpha} < \mathbf{f_\delta}$ .

δ. Έχουμε

$$f'_\delta = f'_\alpha \Rightarrow \frac{u+V_x}{u} f_\alpha = \frac{u-V_x}{u} f_\delta \Rightarrow$$

$$\frac{u+{}^{u}\!/_{100}}{u} f_\alpha = \frac{u-{}^{u}\!/_{100}}{u} f_\delta \Leftrightarrow f_\alpha = \frac{99}{100} f_\delta$$

Έτσι όταν ο παρατηρητής προσεγγίζει τις πηγές θα έχουμε :

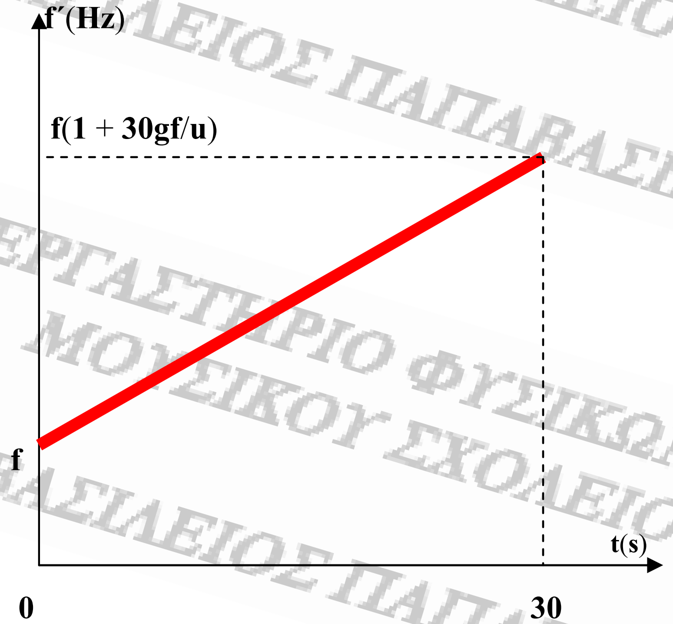
$$f_{\delta\iota\alpha\kappa.} = 1{,}01 = \frac{u+{}^{u}\!/_{100}}{u}\frac{f_\delta}{100} \Rightarrow f_\delta = 100Hz$$

και $f_a = 99Hz$

ε. Η σειρήνα πλησιάζει τον παρατηρητή στο έδαφος και έτσι αυτό θα αντιλαμβάνεται συχνότητα ίση με

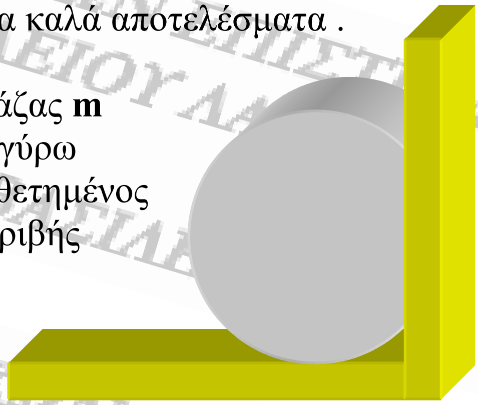
$$f' = \frac{u+V}{u} f = \frac{u+gt}{u} f = f + \frac{gf}{u} t$$

Πρόκειται για εξίσωση ευθείας και η γραφική παράσταση της , για **$0 \le t \le 30$s** , θα έχει τη μορφή :



## Μάιος 2009

Για το μήνα αυτό θα δώσουμε ένα πρόβλημα αποχαιρετισμού των τελειόφοιτων της Γ΄ Λυκείου με την ευχή για καλά αποτελέσματα .



**Spin Doctor .** Ένας ομογενής κύλινδρος , μάζας **m** και ακτίνας **R** , περιστρέφεται δεξιόστροφα γύρω από τον άξονά του . Ο κύλινδρος είναι τοποθετημένος στην γωνία του σχήματος . Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης , μεταξύ του τοίχου και του κυλίνδρου είναι ίδιος μ' αυτόν μεταξύ του πατώματος και του κυλίνδρου (**μ**) .
Να υπολογισθεί η γωνιακή επιβράδυνση **α** του κυλίνδρου .
Να θεωρηθεί γνωστή η επιτάχυνση της βαρύτητας **g** .
Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι ίση με $\mathbf{I = ½mR^2}$ .

**Υπεύθυνος ασκήσεων Βασίλειος Παπαβασιλείου ΠΕ04**

Για τυχόν παρατηρήσεις , διορθώσεις αλλά και … έξυπνες λύσεις των ασκήσεων μπορείτε να επικοινωνήσετε μέσω της διεύθυνσης ergfys@gym-mous-laris.lar.sch.gr