Μουσικό Σχολείο Λάρισας

Λύση του προβλήματος
Απριλίου 2013

Μουσική ελεύθερης πτώσης

α. Το κασετόφωνο **S** (πηγή) υπόκειται σ' ελεύθερη πτώση και η κίνησή του περιγράφεται από τους νόμους της.

Επειδή ο ήχος έχει πεπερασμένη ταχύτητα και χρειάζεται κάποιο χρονικό διάστημα **Δt** για να φτάσει στον παρατηρητή, συμπεραίνουμε ότι τη χρονική στιγμή **t**, ο **Π** (παρατηρητής) δεν λαμβάνει τον ήχο που εκπέμπει το κασετόφωνο τη στιγμή εκείνη – όπου βρίσκεται σε χαμηλότερο ύψος **y** – αλλά ακούει τον ήχο που έχει εκπεμφθεί από το κασετόφωνο κάποια προηγούμενη χρονική στιγμή:

$$\mathbf{t' = t - \Delta t} \qquad (1)$$

με χρονική καθυστέρηση **Δt** = **y'**/**c**, (όπου **y'** το ύψος από το έδαφος που βρισκόταν το κασετόφωνο τη χρονική στιγμή **t'**)

Δηλαδή θα έχουμε:

i) Λόγω ελεύθερης πτώσης της πηγής:

$$\mathbf{y' = h - \frac{1}{2}gt'^2} \qquad (2)$$

ii) Λόγω της πεπερασμένης ταχύτητας του ήχου:

$$\mathbf{\Delta t = \frac{y'}{c} \Leftrightarrow y' = c\cdot\Delta t} \qquad (3)$$

Οι σχέσεις (2) και (3) συνδυαζόμενες δίνουν: $\mathbf{\Delta t = \frac{h}{c} - \frac{g}{2c}(t')^2 \overset{\varepsilon\xi.(1)}{\Rightarrow}}$

$$\mathbf{t' = t - \frac{h}{c} + \frac{g}{2c}(t')^2} \qquad (4)$$

Λύνουμε την ανωτέρω σχέση, πρώτα διευθετώντας τους όρους της καλύτερα σε:

$$\mathbf{\frac{g}{2}(t')^2 - ct' + (ct - h) = 0}$$

και εφαρμόζοντας τους γνωστούς τύπους για το τριώνυμο:

$$t' = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 2gh - 2gct}}{g}$$

Ποια από τις δύο ρίζες του τριωνύμου είναι η αποδεκτή;

Αν αναλογιστούμε την ιδανική περίπτωση όπου μηδενίζεται το ύψος (**h** → **0**) από το οποίο αφήνουμε το κασετόφωνο και ταυτόχρονα θεωρήσουμε ακαριαία την διάδοση του ήχου (**c** → ∞) τότε θα πρέπει και η χρονική καθυστέρηση **Δt** → **0**, δηλαδή θα πρέπει και

$$t' = \frac{c \pm \sqrt{c^2(1 + {}^{2gh}/_{c^2} - {}^{2gt}/_{c})}}{g} \to t$$

. Αυτό το όριο ικανοποιείται μόνο από την ρίζα του τριωνύμου που εκφράζεται με το αρνητικό πρόσημο, δηλαδή η αποδεκτή λύση είναι η:

$$t' = \frac{c - \sqrt{c^2 + 2gh - 2gct}}{g}$$

Συνεπώς, ταχύτητα που είχε το κασετόφωνο την στιγμή (**t'**) που εξέπεμψε τον ήχο που αντιλαμβάνεται ο **Π** ισούται με :

$$u_S = gt' = c - \sqrt{c^2 + 2gh - 2gct}$$

Αυτή είναι και η τιμή της ταχύτητας της πηγής **S** που θα χρησιμοποιήσουμε στη γνωστή σχέση του Doppler:

$$f = \frac{c}{c - u_S} f_0 = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 2gh - 2gct}} f_0$$

β. Η σχέση αυτή μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως:

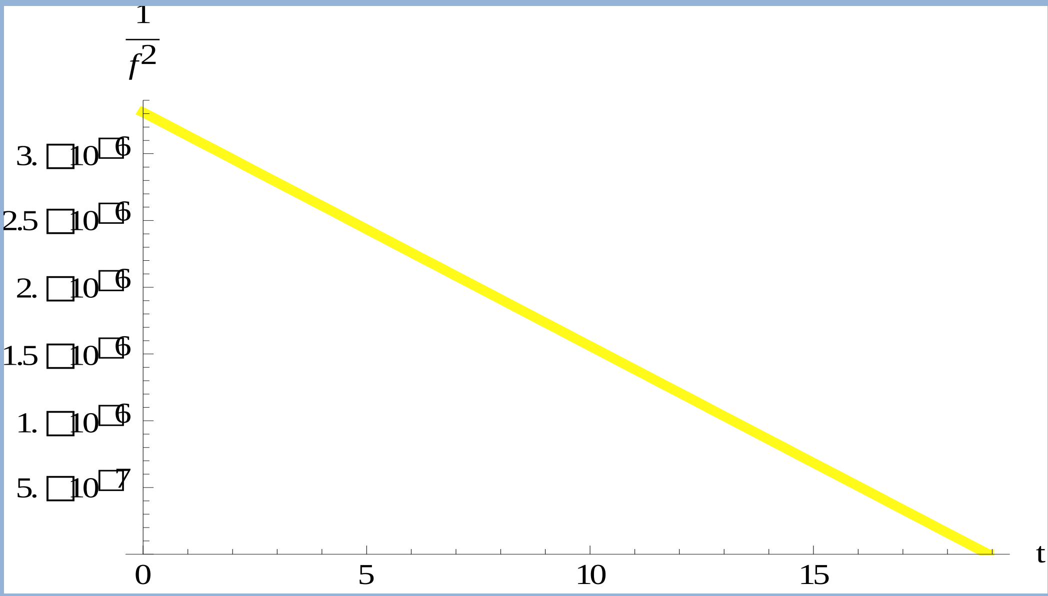
$$\frac{1}{f^2} = \frac{1}{f_0^2}(1 + \frac{2gh}{c^2} - \frac{2g}{c}t)$$

Η σχέση αυτή αν εκφραστεί σε γράφημα με οριζόντιο άξονα – **t** και κατακόρυφο – **1/f²** δίδει ευθεία γραμμή. Η κλίση **α** της ευθείας αυτής είναι ίση με: $\alpha = -\frac{2g}{cf_0^2}$

ενώ, η τομή **β** της με τον κατακόρυφο άξονα ισούται με: $\beta = \frac{1}{f_0^2}(1 + \frac{2gh}{c^2})$

Ένας πρόχειρος πίνακας για την γραφική παράσταση θα μπορούσε να είναι ο κάτωθι:

t(s)	**f(Hz)**	**1/f²**($\times 10^{-6} s^2$)
2,0	**581**	**2,96**
4,0	**619**	**2,61**
6,0	**665**	**2,26**
8,0	**723**	**1,91**
10.0	**801**	**1.56**



γ. Η κλίση της ευθείας του γραφήματος προκύπτει ότι ισούται με $\alpha = -1{,}75 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}$

Έτσι:

$$f_0 = \sqrt{-\frac{2g}{\alpha c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{1{,}75 \times 10^{-7} \cdot 340}} \approx 580\,\mathrm{Hz}$$

δ. Το σημείο τομής με τον κατακόρυφο άξονα προκύπτει ίσο με $\beta = 3{,}31 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}^2$ και μας δίνει αντίστοιχο ύψος:

$$h = \frac{(\beta \cdot f_0^2 - 1)c^2}{2g} = \frac{(3{,}31 \cdot 10^{-6} \cdot 580^2 - 1) \cdot 340^2}{2 \cdot 10} \approx 656\,\mathrm{m}$$

Πρόκειται, πραγματικά, για γιγαντιαίο κτίριο και για εξαιρετικό κασετόφωνο αφού μπορούσες και το άκουγες από τόσο μακριά!

Επιμέλεια ασκήσεων Βασίλειος Παπαβασιλείου ΠΕ04

Για τυχόν παρατηρήσεις , διορθώσεις αλλά και … έξυπνες λύσεις των ασκήσεων μπορείτε να επικοινωνήσετε μέσω της διεύθυνσης ergfys@gym-mous-laris.lar.sch.gr