Μουσικό Σχολείο Λάρισας

Λύση προβλήματος
Φεβρουαρίου 2016

Φυσικός υδραυλικός

Ας δούμε την μεταβολή της πίεσης από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού στο δοχείο μέχρι την έξοδό του από τον σωλήνα.
Επειδή ο κατακόρυφος σωλήνα είναι πολύ στενός, σε σχέση με το δοχείο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το υγρό μέσα στο δοχείο είναι πρακτικά ακίνητο.
Έτσι η μεταβολή της πίεσης, από την ελεύθερη επιφάνειά του μέχρι τον πυθμένα του δοχείου, ικανοποιεί την σχέση: $p = p_0 + \rho g y$
όπου η μεταβλητή y ($0 \le y \le H - h$) μετράει την κατακόρυφη απόσταση ενός σημείου από την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού.
Στον πυθμένα του δοχείου η πίεση που επικρατεί θα ισούται με

$$p_1 = p_0 + \rho g(\mathrm{H} - h) \qquad (1)$$

Κατά μήκος του σωλήνα η κατάσταση αλλάζει. Το ρευστό ρέει με σταθερή ταχύτητα, μέτρου **u**, επειδή η διατομή του σωλήνα είναι σταθερή και το ρευστό ασυμπίεστο.
Την ταχύτητα αυτή, που είναι και η ταχύτητα με την οποία εξέρχεται κάθε στοιχείο του ρευστού από τον σωλήνα, μπορούμε να την υπολογίσουμε με την βοήθεια του θεωρήματος του Torricelli και την βρίσκουμε ίση με: $u = \sqrt{2gH}$ (η ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού βρίσκεται σε ύψος **H** από το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας λόγω βαρύτητας).

Για να έχουμε ροή, από τον πυθμένα του δοχείου προς τον σωλήνα, θα πρέπει να υπάρχει ελάττωση της πίεσης στο σύνορο δοχείου – σωλήνα.
Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής μεταξύ δύο σημείων που βρίσκονται στην αρχή του σωλήνα, το ένα ελάχιστα πιο πάνω από την οπή εισόδου – όπου η πίεση του ρευστού είναι p_1 – και το άλλο ελάχιστα πιο κάτω – όπου η πίεση είναι p_2:

$$p_1 = \tfrac{1}{2}\rho u^2 + p_2$$

Δεν λάβαμε υπόψιν την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας επειδή η κατακόρυφη απόσταση αυτών των σημείων είναι απειροστά μικρή.
Το συμπέρασμα είναι ότι, στο σύνορο του δοχείου με τον σωλήνα, πρέπει να υπάρχει μια ασυνέχεια – ένα άλμα τιμών – της πίεσης:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho u^2 \quad (2)$$

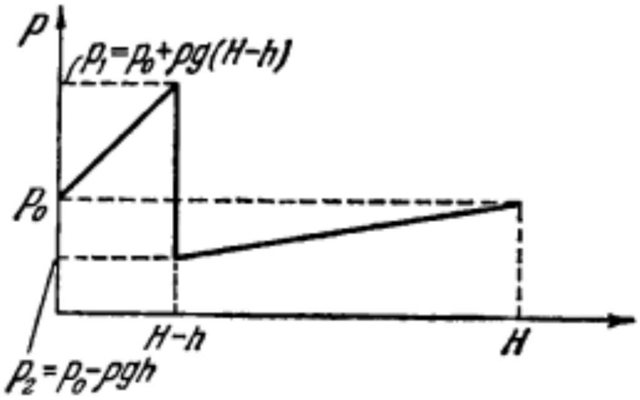
Αν εφαρμόσουμε και πάλι το θεώρημα του Bernoulli, αυτή τη φορά για μια ρευματική γραμμή που περιλαμβάνει ένα σημείο στην ελεύθερη επιφάνεια του δοχείου και ένα άλλο στην κάτω έξοδο του σωλήνα, παίρνουμε:

$$p_0 + \rho g H = p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\rho u^2 = \rho g H \overset{(2)}{\Rightarrow} p_1 - p_2 = \rho g H$$

Ενώ, αν επιλέξουμε το ένα σημείο εντός του σωλήνα, σε απόσταση **y** από την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού ($H - h \le y \le H$), και το άλλο στην κάτω άκρη του σωλήνα θα καταλήξουμε (και πάλι ο Bernoulli):

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g(\mathrm{H} - y) = p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2 \Leftrightarrow p = p_0 - \rho g(\mathrm{H} - y).$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι η κάτωθι:



Ο οριζόντιος άξονας έχει την αφετηρία του στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού στο άνω δοχείο και οι τιμές του αυξάνονται καθώς κινούμαστε κατακόρυφα προς τα κάτω.

Επιμέλεια ασκήσεων Βασίλειος Παπαβασιλείου ΠΕ04

Για τυχόν παρατηρήσεις, διορθώσεις αλλά και … έξυπνες λύσεις των ασκήσεων μπορείτε να επικοινωνήσετε μέσω της διεύθυνσης ergfys@gym-mous-laris.lar.sch.gr