Μουσικό Σχολείο Λάρισας

Λύση του προβλήματος
Ιανουαρίου 2013

Πάνω – κάτω

α. Εξετάζουμε το σύστημα στην Θέση Ισορροπίας του, όπου το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\mathbf{y_0}$.

Θ.Ι. Τροχαλίας: Ισορροπία ως προς την μεταφορική κίνηση

$$\mathbf{F_{\varepsilon\lambda} = T_1 + T_2} \qquad (1)$$

$$\text{με } \mathbf{F_{\varepsilon\lambda} = ky_0} \qquad (2)$$

και

Ισορροπία ως προς την περιστροφή

$$\mathbf{T_1R - T_2R = 0} \qquad (3)$$

όπου $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$ οι τάσεις του αριστερού και του δεξιού νήματος (που φέρει το τούβλο) αντίστοιχα και $\mathbf{F_{\varepsilon\lambda}}$ η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου.

Θ.Ι. Τούβλου: $$\mathbf{T_2 = mg} \qquad (4)$$

Από τις εξισώσεις (1) έως (4) βρίσκουμε ότι:

$$\mathbf{Mg = ky_0/2} \qquad (5)$$

Από την θέση αυτή, αν τεντώσουμε επιπλέον το ελατήριο κατά **y**, προς τα κάτω, τότε η μάζα **m** θα κατεβεί κατά **2y** και θα ισχύει:

Θέση Τυχαίας Απομάκρυνσης Τροχαλίας:

$$\mathbf{\Sigma F_M = F'_{\varepsilon\lambda} - T'_1 - T'_2 = Ma_{cm,M} = Ma_{cm,m}/2} \qquad (6)$$

$$\mathbf{T'_1R - T'_2R = Ia_{\gamma,M} = \tfrac{1}{2}MR^2(a_{cm,m}/R)} \qquad (7)$$

Θέση Τυχαίας Απομάκρυνσης Τούβλου:

$$\mathbf{\Sigma F_m = T'_2 - mg = ma_{cm,m}} \qquad (8)$$

Στις προηγούμενες σχέσεις λάβαμε υπόψη ότι, στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt, η μετατόπιση του τούβλου 2y είναι διπλάσια από την μετατόπιση της τροχαλίας y και έτσι:

$\Delta x_m = 2\Delta x_M \Leftrightarrow y/\Delta t = 2y/\Delta t \Leftrightarrow u_{cm,m} = 2u_{cm,M} \Leftrightarrow \Delta u_{cm,m}/\Delta t = 2\Delta u_{cm,M}/\Delta t \Leftrightarrow$

$$\mathbf{a_{cm,m} = 2a_{cm,M}}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (6) έως (8) βρίσκουμε:

$$\alpha_{cm,m} = \frac{\frac{1}{2}ky}{m + \frac{M}{4}}$$

Θέτοντας την έκφραση αυτή στις εξισώσεις (6) και (8) καταλήγουμε ότι:

$$\sum F_M = \frac{\frac{1}{4}kM}{m + \frac{M}{4}} \cdot y = D_M \cdot y \quad \text{και} \quad \sum F_m = \frac{\frac{1}{2}k \cdot m}{m + \frac{M}{4}} \cdot y = \frac{\frac{1}{4}k \cdot m}{m + \frac{M}{4}} \cdot (2y) = D_m \cdot (2y)$$

Δηλαδή και η τροχαλία και το τούβλο δέχονται δυνάμεις επαναφοράς ανάλογες των μετατοπίσεών τους από τις θέσεις ισορροπίας τους, με σταθερές επαναφοράς $\mathbf{D_M}$ και $\mathbf{D_m}$ αντίστοιχα.
Συνεπώς το σύστημα θα εκτελέσει Γ.Α.Τ. με κοινή περίοδο:

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{m + \frac{M}{2}}{k}}$$

β. Όσο το νήμα είναι τεντωμένο η τροχαλία θα παρασέρνει την μάζα **m** και θα την αναγκάζει να ταλαντώνεται.
Η μόνη περίπτωση να χαλαρώσει το νήμα είναι κατά την κάθοδο οπότε και το τούβλο θα συνεχίσει να πέφτει ελεύθερο με επιτάχυνση **g**.
Για να αποφευχθεί η περίπτωση αυτή θα πρέπει λοιπόν να ισχύει:

$$\alpha_{cm,m} = \frac{\frac{1}{2}ky}{m + \frac{M}{4}} \leq g \Leftrightarrow y_{max} = \frac{(M + 4m)g}{k}$$

Επιμέλεια ασκήσεων Βασίλειος Παπαβασιλείου ΠΕ04

Για τυχόν παρατηρήσεις , διορθώσεις αλλά και … έξυπνες λύσεις των ασκήσεων μπορείτε να επικοινωνήσετε μέσω της διεύθυνσης
ergfys@gym-mous-laris.lar.sch.gr