

Μουσικό Σχολείο Λάρισας

Λύση Μαΐου 2016

Ο Atwood ... αλλιώς!

Ας υποθέσουμε ότι η τροχαλία περιστρέφεται δεξιόστροφα, ο κύλινδρος (σώμα 2) κατέρχεται και το τούβλο (σώμα 1) ανέρχεται.

Έστω α η κοινή επιτάχυνση όλων των σημείων του νήματος:

Η θεμελιώδης εξίσωση της δυναμικής για την κίνηση του τούβλου δίδει:

$$T_1 - mg = m\alpha \Leftrightarrow T_1 = mg + m\alpha \quad (1)$$

όπου T_1 η τάση του νήματος που είναι δεμένο στο τούβλο.

Η τροχαλία εκτελεί περιστροφική κίνηση.

Έστω α_γ η γωνιακή της επιτάχυνση και έτσι:

$$\sum_{\text{άξονα περ.}} \tau = I_\tau \alpha_\gamma \Rightarrow (T_2 - T_1)R = \frac{1}{2}MR^2 \frac{\alpha}{R} \Leftrightarrow T_2 - T_1 = \frac{1}{2}M\alpha \quad (2)$$

όπου T_2 η τάση του νήματος το οποίο είναι τυλιγμένο περίξ του δεύτερου σώματος.

Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση.

Μεταφορική κίνηση: $mg - T_2 = m\alpha_{\text{c.m.2}} \Leftrightarrow T_2 = mg - m\alpha_2 \quad (3)$

όπου α_2 η επιτάχυνση με την οποία κατέρχεται το κέντρο μάζας του δεύτερου σώματος.

Περιστροφική κίνηση:

$$\sum_{\text{άξονα περ.}} \tau = I\alpha_{\gamma 2} \Rightarrow T_2 r = \frac{1}{2}mr^2\alpha_{\gamma 2} \Leftrightarrow T_2 = \frac{1}{2}mr\alpha_{\gamma 2} \quad (4)$$

όπου $\alpha_{\gamma 2}$ η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.

Θα πρέπει να προσθέσουμε ότι εφ' όσον το νήμα είναι σφιχτά τυλιγμένο γύρω από το δεύτερο σώμα τότε το σημείο του νήματος που εφάπτεται του κυλίνδρου συμμετέχει και στην κίνηση του νήματος και στην κίνηση του κυλίνδρου, συνεπώς θα πρέπει να ισχύει:

$\alpha = \alpha_2 - \alpha_{\gamma 2} \cdot r \Leftrightarrow \alpha_{\gamma 2} \cdot r = \alpha_2 - \alpha$

κι έτσι η προηγούμενη σχέση μετασχηματίζεται στην: $T_2 = km(\alpha_2 - \alpha) \quad (4')$

Το σύστημα των ανωτέρω τεσσάρων εξισώσεων μπορεί να μας δώσει τις τάσεις των νημάτων και τις επιταχύνσεις των σωμάτων και του νήματος.

Αφαιρώντας κατά μέλη την εξ. (1) από την εξ. (3) – και με τη βοήθεια της εξ. (2) – προκύπτει ότι:

$$\alpha = -\frac{2m}{2m+M}\alpha_2 \quad (5)$$

Το αρνητικό πρόσημο μας δείχνει ότι το τούβλο επιταχύνεται αντίθετα απ' ό τι υποθέσαμε, δηλαδή κατεβαίνει.

Αντικαθιστώντας, από την εξ. (5), το μέτρο της α στην εξ. (4') παίρνουμε:

$$T_2 = \frac{m\left(m + \frac{M}{4}\right)}{m + \frac{M}{2}}\alpha_2 \quad (6)$$

Οι εξ. (3) και (6) έχουν ίσα τα αριστερά τους μέλη άρα θα έχουν ίσα και τα δεξιά. Μετά από απαλοιφές και αρκετές προσθαφαιρέσεις προκύπτει ότι:

$$\alpha_2 = \frac{4m+2M}{8m+3M}g \quad (7)$$

Εν τέλει, από τις εξ. (5) και (7) καταλήγουμε και στην αλγεβρική τιμή της άλλης επιτάχυνσης (αρνητικό πρόσημο => προς τα κάτω):

$$\alpha = -\frac{4m}{8m+3M}g \quad (8)$$

Επιμέλεια ασκήσεων Βασίλειος Παπαβασιλείου ΠΕ04

Για τυχόν παρατηρήσεις, διορθώσεις αλλά και ... έξυπνες λύσεις των ασκήσεων μπορείτε να επικοινωνήσετε μέσω της διεύθυνσης ergfys@gym-mous-laris.lar.sch.gr