Μουσικό Σχολείο Λάρισας

Λύση προβλήματος

Σεπτεμβρίου 2015

Κρούσεις… πανταχόθεν
Επειδή η μπάλα εξέρχεται κατακόρυφα ως προς τον κύβο αυτό συνεπάγεται ότι και τα δύο σώματα θα έχουν ίσες οριζόντιες ταχύτητες με μέτρο $\mathbf{u_{ορ}}$.
Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής στον οριζόντιο άξονα:

$$\mathbf{mu_o + 0 = mu_{ορ.} + Mu_{ορ.}} \Leftrightarrow u_{ορ.} = \frac{m}{m+M} u_0 \qquad (1).$$

Για να υπολογίσουμε την κατακόρυφη συνιστώσα $\mathbf{u_{κατ.}}$ της ταχύτητας της μπάλας θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας – αφού δεν υπάρχουν ενεργειακές απώλειες λόγω τριβών.

$$\tfrac{1}{2} m u_0^2 = \tfrac{1}{2} M u_{ορ.}^2 + \tfrac{1}{2} m (u_{ορ.}^2 + u_{κατ.}^2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} m u_0^2 - (M+m)\left(\frac{m}{m+M}\right) u_0^2 = m u_{κατ.}^2 \Leftrightarrow$$

$$u_{κατ.} = \sqrt{\frac{M}{m+M}} \cdot u_0$$

Το χρονικό διάστημα που «ξοδεύει» στον αέρα η μπάλα, για την άνοδό της και την κάθοδό της, ισούται με $t_{κατ.} = \dfrac{2u_{κατ.}}{g}$ (3)

Ταυτόχρονα, ο κύβος θα έχει μετατοπιστεί οριζόντια κατά

$$x = u_{ορ.} t_{κατ.} = \frac{2u_{ορ.} u_{κατ.}}{g} \overset{(1)\ \&\ (2)}{=} \frac{2u_0^2}{g} \sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)^3}} \qquad (4)$$

Όταν η μπάλα επιστρέφει στον κύβο εξέρχεται και πάλι οριζόντια προς τα πίσω αλλά το σημείο όπου εισήλθε για $\mathbf{1^η}$ φορά μέσα στον κύβο απέχει τώρα απόσταση **x** από τη νέα θέση εξόδου.
Η νέα κρούση των δύο σωμάτων θα είναι και πάλι ελαστική. Αν συμβολίσουμε με **V** την ταχύτητα της μπάλας μετά την κρούση και με $\mathbf{u'_{κυβ.}}$ του κύβου μετά την κρούση, τότε η αρχή διατήρησης της ενέργειας θα δώσει:

$$\tfrac{1}{2} m V^2 + \tfrac{1}{2} M u'^2_{κυβ.} = \tfrac{1}{2} M u_{ορ.}^2 + \tfrac{1}{2} m (u_{ορ.}^2 + u_{κατ.}^2) = \tfrac{1}{2} m u_0^2$$

Και η αρχή διατήρησης της ορμής, στην οριζόντια διεύθυνση, θα δώσει:

$$mV + M u'_{κυβ.} = (M+m) u_{ορ.} \overset{(1)}{=} m u_0$$

Απ' αυτές τις δύο εξισώσεις, απαλείφοντας την ταχύτητα του κύβου $\mathbf{u'_{κυβ.}}$ καταλήγουμε: $(M+m)V^2 + 2mu_0 V + (m-M)u_0^2 = 0$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση, ως προς **V**, έχει δύο λύσεις. Απ' αυτές φυσικά αποδεκτή είναι η $V = \frac{m-M}{m+M}u_0 \qquad (5)$.

Έτσι ο χρόνος που απαιτείται για να επιστρέψει η μπάλα στο αρχικό σημείο εισόδου της στον κύβο θα δίδεται από τη σχέση:

$$t_{\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\rho.} = \frac{x}{|V|} \overset{(4)\&(5)}{=} \frac{2u_0}{g}\sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)(M-m)^2}} \qquad (6)$$

Τελικά το ζητούμενο χρονικό διάστημα θα ισούται:

$$t_{o\lambda.} = t_{\kappa\alpha\tau.} + t_{\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\rho.} \overset{(3)\&(6)}{=} \frac{2u_0}{g}\sqrt{\frac{M}{m+M}}\left(1+\sqrt{\frac{m^2}{(M-m)^2}}\right)$$

Επιμέλεια ασκήσεων Βασίλειος Παπαβασιλείου ΠΕ04

Για τυχόν παρατηρήσεις, διορθώσεις αλλά και … έξυπνες λύσεις των ασκήσεων μπορείτε να επικοινωνήσετε μέσω της διεύθυνσης ergfys@gym-mous-laris.lar.sch.gr