

1. Έστω C ο μοναδιαίος κύκλος:

ι) Να βρείτε το  $\lambda$ , ώστε το σημείο  $M(\frac{1}{2}, \lambda)$  να ανήκει στον κύκλο C.

ιι) Να βρείτε τη σχετική θέση των σημείων  $A(\frac{3}{4}, 1)$  και  $B(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$  ως προς τον κύκλο C

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C με κέντρο την αρχή των αξόνων σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

ι) Όταν διέρχεται από το σημείο  $A(-2\sqrt{2}, 1)$

ιι) Όταν εφάπτεται της ευθείας  $\epsilon: 3x - 4y + 1 = 0$

3. Α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του μοναδιαίου κύκλου στο σημείο του  $A(\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$   
 Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho=5$ , στο σημείο του  $M(3, \lambda), \lambda < 0$

4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = 2$  σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

ι) Όταν έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda=3$

ιι) Όταν είναι κατακόρυφη

ιιι) Όταν διέρχεται από το σημείο  $A(1, 2)$

5. Έστω ο κύκλος  $C: 4x^2 + 4y^2 = 3$

ι) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\epsilon: x\sqrt{3} - 3y - 3 = 0$  εφάπτεται στον κύκλο C

ιι) Να βρείτε το σημείο τομής M της ευθείας  $\epsilon$  με τον άξονα  $x'x$  και μετά την άλλη εφαπτομένη του κύκλου C που διέρχεται από το M

ιιι) Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών  $\epsilon$  και  $\eta$ .

6. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = 25$

ι) Όταν το σημείο  $M(1, 2)$  είναι μέσο της

ιι) Όταν διέρχεται από το σημείο  $(-1, 3)$  και έχει μήκος ίσο με 8.

7. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

ι) Όταν το κέντρο K ανήκει στην ευθεία  $\epsilon: y = 2x$  και διέρχεται από τα σημεία  $A(1, -2)$  και  $B(3, 0)$

ιι) Όταν έχει ακτίνα  $\rho=5$  και διέρχεται από τα σημεία  $A(6, 2)$  και  $B(0, 2)$

8. Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου C του τριγώνου ABΓ με  $A(-2, 1)$ ,  $B(1, 0)$  και  $\Gamma(1, 4)$

9. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

ι) Όταν έχει κέντρο  $K(1, -3)$  και εφάπτεται στον άξονα  $x'x$

ιι) Όταν εφάπτεται στον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $A(0, 3)$  και το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία  $\epsilon: y = 2x$

ιιι) Όταν διέρχεται από το σημείο  $A(1, -2)$  και εφάπτεται στους άξονες  $x'x$  και  $y'y$

10. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

ι) Όταν έχει κέντρο  $K(2, -1)$  και εφάπτεται της ευθείας  $\epsilon: 5x - 12y - 1 = 0$

ιι) Όταν εφάπτεται της ευθείας  $\epsilon: 4x - 3y + 6 = 0$  στο σημείο τομής της με τον άξονα  $y'y$  και το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία  $\eta: y = 2x$

ιιι) Όταν εφάπτεται της ευθείας  $\epsilon: x - y + 1 = 0$  στο σημείο της  $A(2, 3)$  και διέρχεται από την αρχή των αξόνων

11. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που εφάπτεται των ευθειών  $\epsilon_1: 2x + y - 5 = 0$  και  $\epsilon_2: 2x + y + 15 = 0$  και το ένα σημείο επαφής είναι το  $A(2, 1)$

12. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση:

ι)  $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$

ιι)  $x^2 + y^2 + 6x + 8 = 0$

$$\text{ιι) } \mathbf{x(x-1) + (y+1)(y-3) = 0}$$

$$\text{ιν) } \mathbf{(x+y)^2 - 2y = 2x(\alpha + y)}$$

13. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει διάμετρο τη διάκεντρο των κύκλων  $C_1 : 4x^2 + 4y^2 = 1$  και  $C_2 : (x-1)(x+3) = y(y-2) = 0$

14. Έστω ο κύκλος  $C : x^2 + y^2 - 2\lambda x + \mu - 1 = 0$

ι) Να βρείτε το  $\mu$  ώστε ο κύκλος C να διέρχεται από το σημείο  $M(0,1)$

ιι) Για  $\mu=0$ , να βρείτε το  $\lambda$  ώστε η ευθεία  $\epsilon : y = x - 1$  να τέμνει τον κύκλο στα σημεία A, B και να

$$\text{ισχύει: } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$

15. Έστω ότι ο κύκλος C διέρχεται από το O και η ευθεία  $\epsilon : x - y + 1 = 0$  τέμνει τον κύκλο C στα

σημεία A και B ώστε να ισχύει:  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ . Αν ο κύκλος έχει ακτίνα  $\rho = \sqrt{5}$ , να βρείτε την εξίσωσή του.

16. Δίνεται ο κύκλος  $C : x^2 + y^2 - 4y = 0$ . Να βρείτε τη σχετική θέση των παρακάτω σημείων ως προς τον κύκλο C

ι)  $A(\sqrt{3}, 3)$

ιι)  $B(1, 3)$

ιιι)  $\Gamma(2, 1)$

17. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο  $K(1, -2)$  που εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου  $C : x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$

18. Δίνονται οι κύκλοι  $C_1 : x^2 + y^2 = 1, C_2 : x^2 + y^2 + 3x + 4y + \lambda = 0, C_3 : x^2 + y^2 - x - y + \lambda = 0$

Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε:

ι) Οι κύκλοι  $C_1, C_2$  να εφάπτονται εξωτερικά

ιι) Οι κύκλοι  $C_1, C_3$  να εφάπτονται εσωτερικά

19. Έστω ο κύκλος  $C : x^2 + (y-1)^2 = 25$

Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο του  $A(-3, 5)$

20. Δίνεται ο κύκλος  $C_1 : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$

ι) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $\epsilon$  του κύκλου στο σημείο του  $A(-1, 5)$

ιι) Να δείξετε ότι η ευθεία  $\epsilon$  εφάπτεται του κύκλου  $C_2 : x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$

21. Δίνεται ο κύκλος  $C : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$  Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου C:

ι) που έχουν συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = -2$

ιι) που διέρχονται από το σημείο  $M(1 + \sqrt{5}, 3)$

22. Δίνεται ο κύκλος  $C : x^2 + y^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 5 = 0$

ι) Να βρείτε το  $\lambda$ , ώστε ο κύκλος C να εφάπτεται στην ευθεία  $\epsilon : y = 2x - 7$

ιι) Για  $\lambda=1$ , να βρείτε την άλλη εφαπτομένη του κύκλου C που διέρχεται από το σημείο τομής της  $\epsilon$  με τον άξονα  $x'x$

23. Δίνεται ο κύκλος  $C : x^2 + y^2 = 3$ . Από το σημείο  $M(1, -2)$  φέρνουμε τις εφαπτόμενες MA και MB στον κύκλο C. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής AB.

24. Έστω οι ευθείες  $\epsilon : x \mu \theta + y \sigma \nu \theta = \sigma \nu \theta$  και  $\eta : x \sigma \nu \theta - y \mu \theta = \eta \mu \theta$

Να δείξετε ότι:

ι) οι ευθείες  $\epsilon$  και  $\eta$  τέμνονται

ιι) το σημείο τομής M, των  $\epsilon$  και  $\eta$  ανήκει σε κύκλο

ιιι) αν μία ευθεία  $\zeta$  τέμνει τις  $\epsilon$  και  $\eta$  στα A και B, τότε  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

25. Δίνεται ο κύκλος  $C : x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$

Να βρείτε τα σημεία του κύκλου που απέχουν τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη απόσταση από το σημείο O.

26. Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση της αρχής των αξόνων από τον κύκλο  
 $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$
27. Δίνεται ο κύκλος  $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$  και το σημείο  $A(3,0)$ . Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο  $A$  και την οξεία γωνία που σχηματίζουν αυτές.
28. Έστω ο κύκλος  $C: x^2 + y^2 = 3$  και η ευθεία  $\varepsilon: x + y + 4 = 0$ .  
 ι) Να δείξετε ότι ο κύκλος  $C$  και η ευθεία  $\varepsilon$  δεν έχουν κανένα κοινό σημείο  
 ιι) Από ένα σημείο  $M$  της  $\varepsilon$  φέρνουμε τις εφαπτόμενες  $MA, MB$  στον κύκλο  $C$  όπου  $A, B$  τα σημεία επαφής. Αν το σημείο  $M$  κινείται στην ευθεία  $\varepsilon$ , να δείξετε ότι η ευθεία  $AB$  διέρχεται από σταθερό σημείο.
29. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 1 = 0$  (1)  
 Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο  $C$  και το κέντρο του να ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon: 3x - y + \lambda^2 = 0$ . Μετά να βρείτε τα σημεία του  $C$  που ισαπέχουν μέγιστη και ελάχιστη απόσταση από το  $O$ .
30. Α. Να βρείτε τις τιμές των  $\lambda, \mu$  ώστε η εξίσωση  $(\lambda^2 - 2\mu)x^2 - (\mu^2 + 1)y^2 + \lambda x + 4\mu y = 0$  να παριστάνει κύκλο.  
 Β. Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ , ώστε η εξίσωση  $\lambda(x^2 + 2y^2) + (y - 2x + 1)(y + 2x + 3) = 0$  να παριστάνει κύκλο.
31. Δίνεται η εξίσωση  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2\lambda(x+2y-5), (\lambda) \in \mathbf{R}$   
 ι) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbf{R}^*$   
 ιι) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την (1)  
 ιιι) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο
32. Α. Δίνονται οι κύκλοι  $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$  και  $C_2: x^2 + y^2 = 1$   
 Να δείξετε ότι οι  $C_1, C_2$  εφάπτονται.  
 Β. Δίνεται η εξίσωση  $C_\lambda: x^2 + y^2 - 6x + 5 + \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0$  (1),  $\lambda \in \mathbf{R}$   
 ι) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ , ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο  
 ιι) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο  
 ιιι) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων
33. Δίνεται η οικογένεια των κύκλων  $C_\lambda: x^2 + y^2 - 5 = 2\lambda(x-1), \lambda \in \mathbf{R}$   
 ι) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι  $C_\lambda$  διέρχονται από δυο σταθερά σημεία  
 ιι) Να βρείτε την κοινή χορδή όλων των κύκλων  $C_\lambda$
34. Δίνεται η εξίσωση  $C_\lambda: x^2 + y^2 - 2x + \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0$  (1),  $\lambda \in \mathbf{R}$   
 ι) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο  
 ιι) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων  
 ιιι) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία  
 ιιιι) Να βρείτε την κοινή χορδή όλων των κύκλων που ορίζονται από την (1).