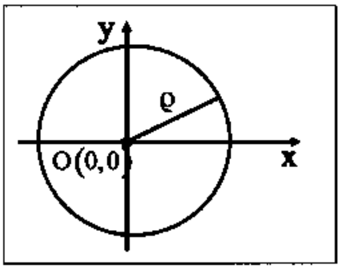
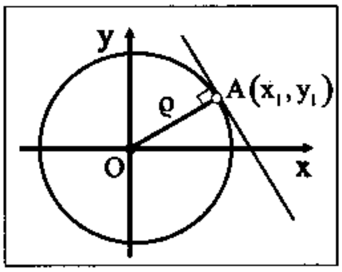
ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ –ΤΥΠΟΙ
1) ΚΥΚΛΟΣ

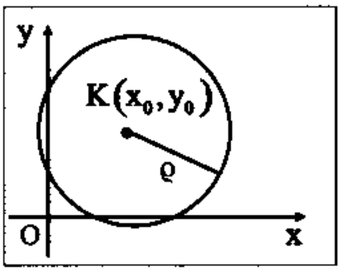




Εξίσωση κύκλου με κέντρο O(0 , 0) και ακτίνα ρ : $\boxed{x^2+y^2=\rho^2}$

Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ στο σημείο $A(x_1, y_1)$:

$$\boxed{xx_1+yy_1=\rho^2}$$



Εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2}$$

$$\boxed{\text{Η εξίσωση } x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \quad (1),\ A, B, \Gamma \in R}$$

Αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με

κέντρο το σημείο: $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

Αν $A^2+B^2-4\Gamma=0$ η (1) παριστάνει το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.

Αν $A^2+B^2-4\Gamma<0$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη .

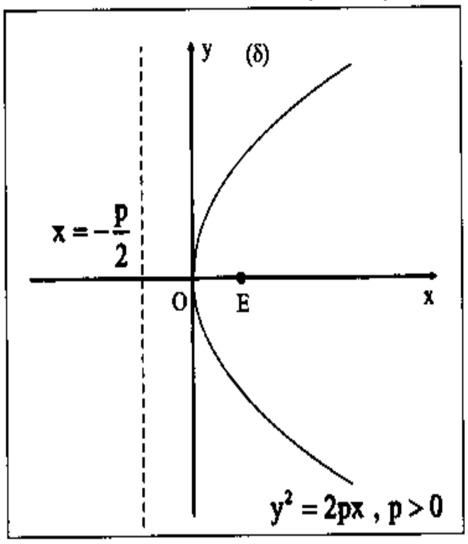
2) ΠΑΡΑΒΟΛΗ

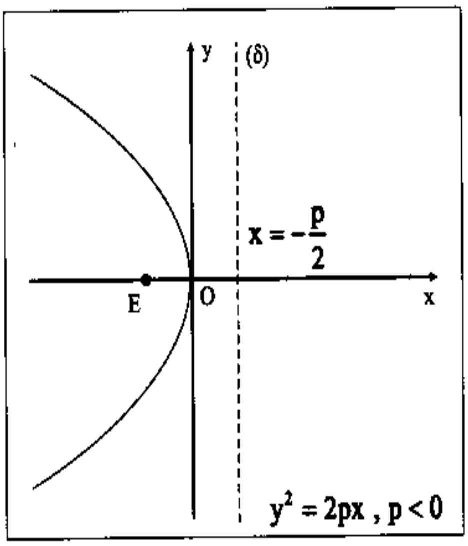
Ορισμός

Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από μια σταθερή ευθεία (δ) που λέγεται **διευθετούσα** της παραβολής και από ένα σταθερό σημείο Ε που λέγεται **εστία** της παραβολής. Τα σημεία που ικανοποιούν την προηγούμενη ιδιότητα ανήκουν σε μια καμπύλη που φαίνεται στα επόμενα σχήματα.

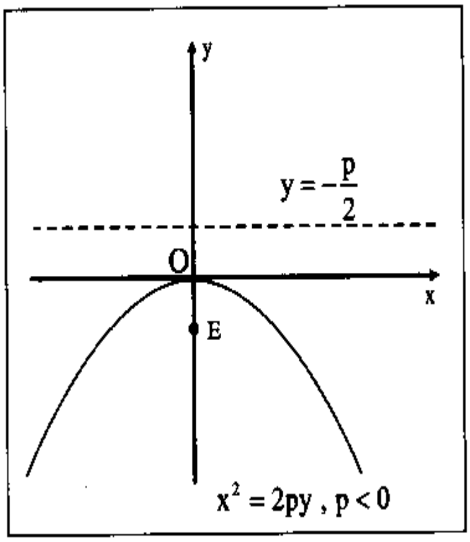
Εξίσωση παραβολής και γραφική παράσταση

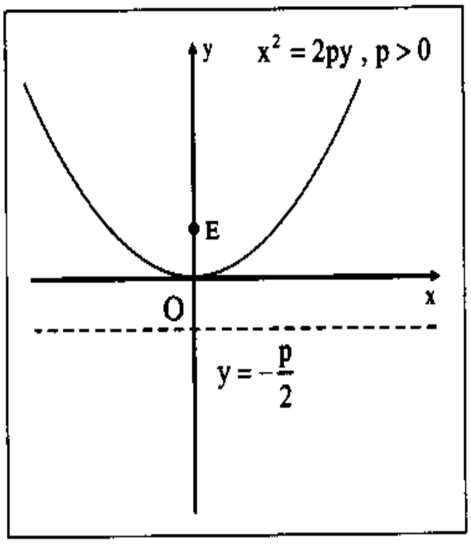
1. Με κορυφή $O(0,0)$, εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$, και διευθετούσα $\delta:\ x=-\frac{p}{2}$ $\boxed{y^2=2px}$





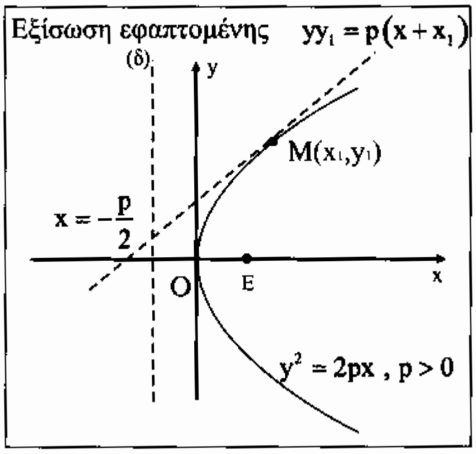
2. Με κορυφή $O(0,0)$, εστία $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$, και διευθετούσα $\delta:\ y=-\frac{p}{2}$ $\boxed{x^2=2py}$

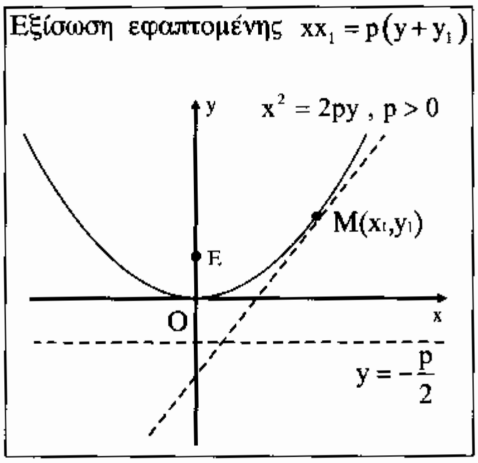




Εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$: $\boxed{yy_1 = p(x + x_1)}$

Εφαπτομένη της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$: $\boxed{xx_1 = p(y + y_1)}$





Μνημονικός κανόνας για την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής:

Έστω ότι αναζητούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημεί-ο $M(x_1, y_1)$.

Εκτελούμε τα εξής:

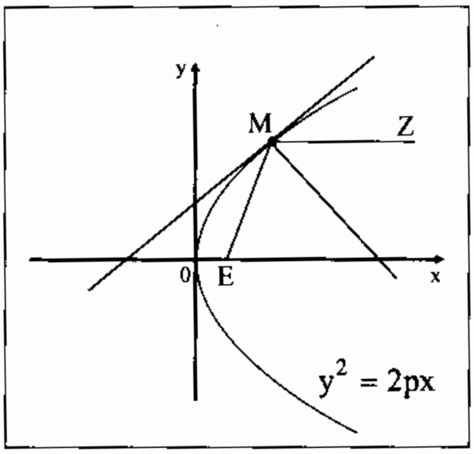
α. Γράφουμε την εξίσωση της παραβολής: $y^2 = 2px$ (1)

β. Επειδή $y^2 = y \cdot y$ και $2x = x + x$ αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε: $y \cdot y = p(x + x)$

γ. Στο δεύτερο y και x θέτουμε y_1 και x_1 αντίστοιχα και παίρνουμε: $y \cdot y_1 = p(x + x_1)$ που είναι και η ζητούμενη εξίσωση.

Ομοίως εργαζόμαστε και στην περίπτωση της παραβολής $x^2 = 2py$

Ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής



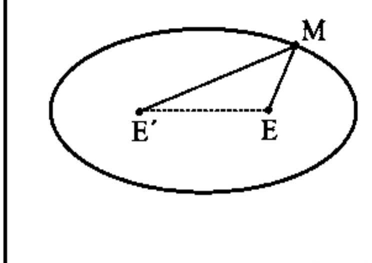
Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημεί-ο επαφής M διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία ME και η ημιευθεία MZ, που είναι ομόρροπη της OE, όπου E είναι η εστία της παραβολής.

Η ιδιότητα αυτή της παραβολής έχει πολλές εφαρμογές στην καθημερινή ζωή, π.χ στα παραβολικά τηλεκόπια, στα ραντάρ,στα φανάρια των αυτοκινήτων κ.λ.π.

3) ΄ΕΛΛΕΙΨΗ

Ορισμός

Έλλειψη ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία Ε και Ε΄ είναι σταθερό και μεγαλύτερο της απόστασης των δύο σημείων. Τα δύο αυτά σημεία, το Ε και το Ε΄, τα ονομάζουμε **εστίες** και τη μεταξύ τους απόσταση, **εστιακή απόσταση** και τη συμβολίζουμε με 2γ.

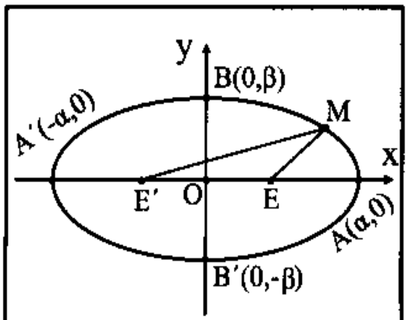


σχήμα 1

Το άθροισμα των αποστάσεων του τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις δύο εστίες το συμβολίζουμε με 2α και αποτελεί το μήκος του **μεγάλου άξονα** της έλλειψης.
Είναι (ΜΕ) + (ΜΕ΄) = 2α

Η εξίσωση της έλλειψης ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα x΄x την ευθεία που διέρχεται από τα Ε και Ε΄ και άξονα y΄y την μεσοκάθετο του ΕΕ΄ είναι:

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1} \quad (\text{σχήμα } 2)$$

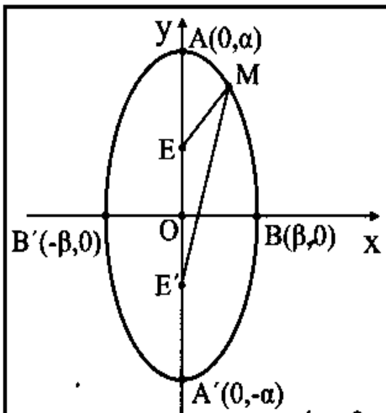


σχήμα 2

όπου $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$.

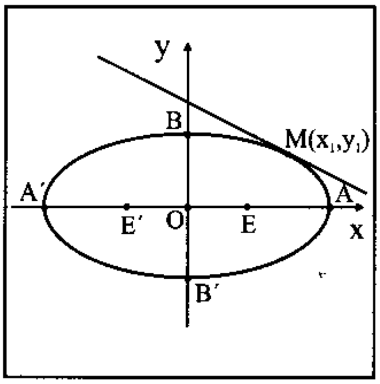
Ο **μικρός άξονας** ΒΒ΄ της έλλειψης έχει μήκος 2β.
Η εξίσωση της έλλειψης ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα y΄y την ευθεία που διέρχεται από τα Ε και Ε΄ και άξονα x΄x την μεσοκάθετο του ΕΕ΄ είναι:

$$\boxed{\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1} \quad (\text{σχήμα } 3)$$



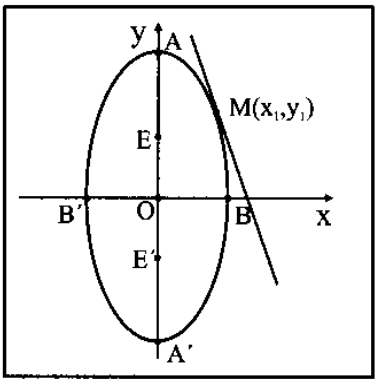
σχήμα 3

Εξίσωση εφαπτομένης



Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\alpha>\beta$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι

$$\boxed{\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1}$$



Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$, $\alpha>\beta$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι

$$\boxed{\frac{xx_1}{\beta^2}+\frac{yy_1}{\alpha^2}=1}$$

• Μνημονικός κανόνας για την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης:

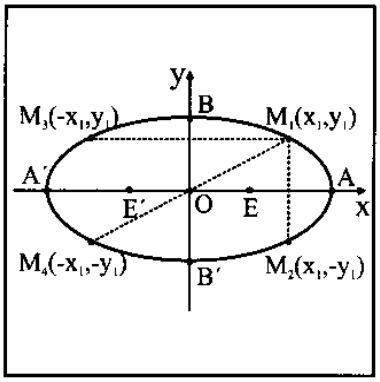
Έστω ότι αναζητούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο $M(x_1,y_1)$.

α. Γράφουμε την εξίσωση της έλλειψης: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ (1)

β. Επειδή $x^2=x\cdot x$ και $y^2=y\cdot y$ έχουμε από την (1): $\frac{x\cdot x}{\alpha^2}+\frac{y\cdot y}{\beta^2}=1$

γ. Στο δεύτερο x και y θέτουμε x_1 και y_1 αντίστοιχα και έχουμε $\frac{x\cdot x_1}{\alpha^2}+\frac{y\cdot y_1}{\beta^2}=1$, που είναι και η ζητούμενη εξίσωση.Ομοίως εργαζόμαστε και για την έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1,\ \alpha>\beta.$$

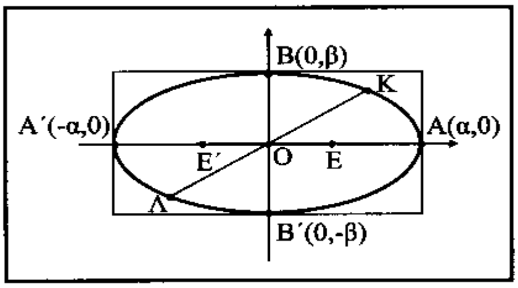


Ιδιότητες έλλειψης

Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

α. Έχει άξονες συμμετρίας τους x΄x και y΄y. Κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O(0,0).

Δηλαδή αν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη τότε ανήκουν στην έλλειψη και τα σημεία $M_2(x_1, -y_1)$, $M_3(-x_1, y_1)$, $M_4(-x_1, -y_1)$.



β. Τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Α(α,0) και Α΄(-α,0) και τον άξονα y΄y στα σημεία Β(0,β) και Β΄(0,-β).
Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ΄ λέγεται **μεγάλος άξονας** της έλλειψης και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΒ΄ λέγεται **μικρός άξονας** της έλλειψης. Το Ο λέγεται **κέντρο** της έλλειψης. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ του οποίου τα άκρα Κ, Λ, ανήκουν στην έλλειψη και διέρχεται από το κέντρο Ο λέγεται **διάμετρος** της έλλειψης.

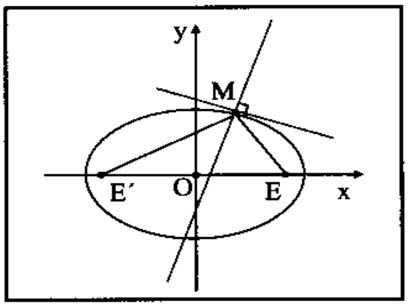
γ. Η έλλειψη C περιέχεται στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο ορίζουν οι ευθείες:

$$x = \alpha\ ,\ x = -\alpha\ ,\ y = \beta\ \text{ και }\ y = -\beta.$$

Γενικά για τις συντεταγμένες (x, y) οποιουδήποτε σημείου της έλλειψης ισχύει :

$$\begin{Bmatrix} -\alpha \le x \le \alpha \\ -\beta \le y \le \beta \end{Bmatrix}$$

δ. Ανακλαστική ιδιότητα



Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$, όπου Ε΄, Ε οι εστίες της έλλειψης.

• Χρήσιμη παρατήρηση:

Ας δούμε τι παριστάνει η εξίσωση C: $\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$, όπου μ, λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν $\mu > \lambda$, τότε η C είναι έλλειψη με εστίες στον άξονα x΄x και σταθερό άθροισμα 2μ.

β. Αν $\mu < \lambda$, τότε η C είναι έλλειψη με εστίες στον άξονα y΄y και σταθερό άθροισμα 2λ.

γ. Αν $\mu = \lambda$, τότε $C : x^2 + y^2 = \mu^2$ και παριστάνει κύκλο.

Εκκεντρότητα έλλειψης

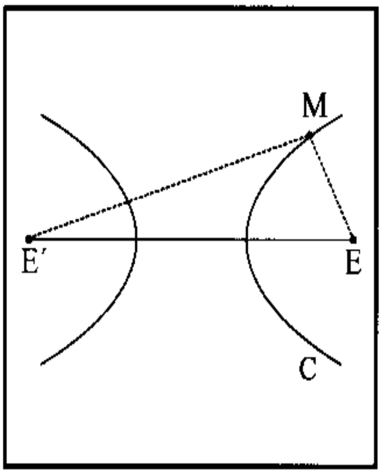
Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της έλλειψης C *το λόγο της εστιακής απόστασης προς το μήκος του μεγάλου άξονα* και τη συμβολίζουμε με $\varepsilon = \frac{2\gamma}{2\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$. Είναι $0 < \varepsilon < 1$

Αποδεικνύεται ότι: $\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$. Οπότε όταν το ε τείνει στο 1, το β τείνει στο 0 και η έλλειψη τείνει να γίνει ευθύγραμμο τμήμα.Αν το ε τείνει στο 0 τότε το β τείνει να γίνει ίσον με το α και η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.

4) ΥΠΕΡΒΟΛΗ

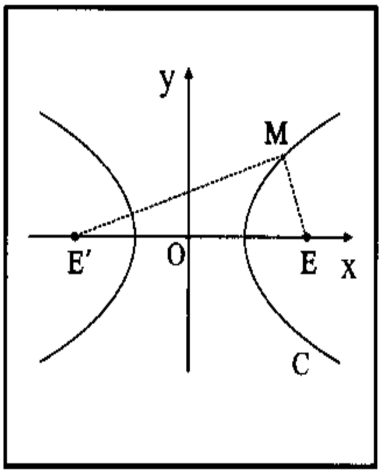
Ορισμός



Υπερβολή ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων η διαφορά των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία Ε και Ε΄ είναι σταθερή και μικρότερη απο την απόσταση των δύο σημείων. Τα δύο αυτά σημεία, Ε και Ε΄ τα ονομάζουμε **εστίες** και τη μεταξύ τους απόσταση **εστιακή απόσταση** και τη συμβολίζουμε με 2γ.

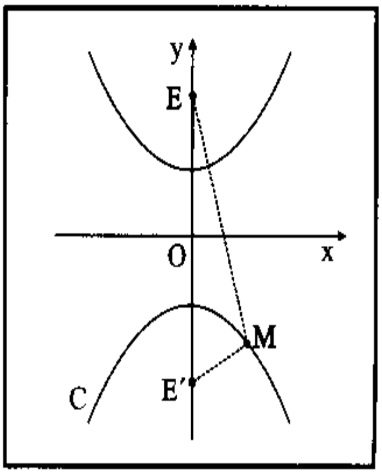
Την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων του τυχαίου σημείου της υπερβολής από τις δύο εστίες τη συμβολίζουμε με 2α

Είναι: $\mathbf{|(ME) - (ME')| = 2\alpha}$



Η εξίσωση της υπερβολής ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα x΄x την ευθεία που διέρχεται από τα Ε και Ε΄ και άξονα y΄y την μεσοκάθετο του ΕΕ΄ είναι:

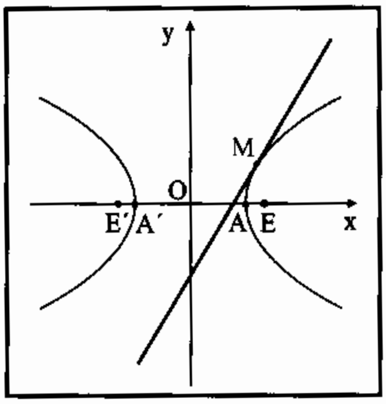
$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad , \text{όπου } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2.}$$



Η εξίσωση της υπερβολής ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα y΄y την ευθεία που διέρχεται από τα Ε και Ε΄ και άξονα x΄x την μεσοκάθετο του ΕΕ΄ είναι:

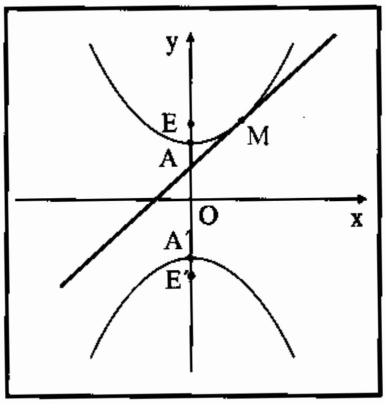
$$\boxed{\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \quad , \text{όπου } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2.}$$

Εξίσωση εφαπτομένης



Έστω η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι :

$$\boxed{\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1}$$



Έστω η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι :

$$\boxed{\frac{yy_1}{\alpha^2}-\frac{xx_1}{\beta^2}=1}$$

• *Μνημονικός κανόνας για την εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης σε υπερβολή :*

Έστω ότι αναζητούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο $M(x_1,y_1)$.

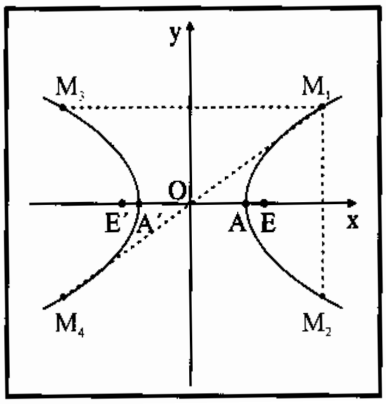
α. Γράφουμε την εξίσωση της υπερβολής : $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ (1)

β. Επειδή $x^2=x\cdot x$ και $y^2=y\cdot y$ έχουμε από την (1) : $\frac{x\cdot x}{\alpha^2}-\frac{y\cdot y}{\beta^2}=1$.

γ. Στο δεύτερο x και y θέτουμε x_1 και y_1 αντίστοιχα και έχουμε $\frac{x\cdot x_1}{\alpha^2}-\frac{y\cdot y_1}{\beta^2}=1$, που είναι και η ζητούμενη εξίσωση.

Ομοίως εργαζόμαστε και στην υπερβολή $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$.

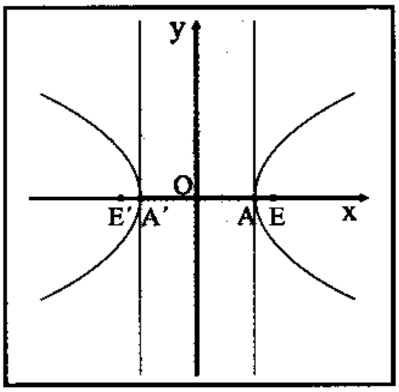
Ιδιότητες υπερβολής



Έστω μια υπερβολή C, με εξίσωση : $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

α. Έχει άξονες συμμετρίας τον x΄x και τον y΄y και

κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O(0,0).
Δηλαδή ,αν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην υπερβολή τότε ανήκουν στην υπερβολή και τα σημεία $M_2(x_1, -y_1)$, $M_3(-x_1, y_1)$, $M_4(-x_1, -y_1)$.



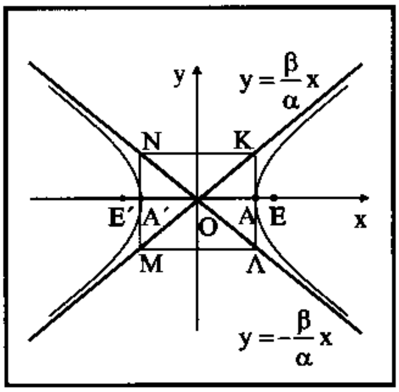
β. Τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Α(α,0) και Α΄(-α,0) τα οποία λέγονται **κορυφές** της υπερβολής.
Δεν τέμνει τον άξονα y΄y.Το Ο λέγεται **κέντρο** της υπερβολής.

γ. Η υπερβολή C αποτελείται από δύο ξεχωριστούς κλάδους. Οι δύο αυτοί κλάδοι βρίσκονται εκτός της ταινίας των ευθειών x = -α και x = α.
Γενικά για κάθε σημείο της υπερβολής με συντεταγμένες (x, y) ισχύει : $\begin{Bmatrix} x \leq -\alpha \\ x \geq \alpha \end{Bmatrix}$

Ασύμπτωτες υπερβολής

Η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες

$$\varepsilon_1 : y = \frac{\beta}{\alpha}x \text{ και } \varepsilon_2 : y = -\frac{\beta}{\alpha}x$$



Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΚΛΜΝ με κορυφές τα σημεία $K(\alpha, \beta)$, $\Lambda(\alpha, -\beta)$, $M(-\alpha, -\beta)$, $N(-\alpha, \beta)$ το οποίο λέγεται **ορθογώνιο βάσης** της υπερβολής.

• Μνημονικός κανόνας για τις ασύμπτωτες των υπερβολών:

Οι ασύμπτωτες των υπερβολών $C_1 : \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $C_2 : \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ βρίσκονται αν παραγοντοποιήσουμε το πρώτο μέλος των παραπάνω εξισώσεων και θέσουμε κάθε παράγοντα ίσο με το μηδέν.

Εκκεντρότητα υπερβολής

Έστω η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της υπερβολής και τη συμβολίζουμε με ε το λόγο $\varepsilon = \frac{2\gamma}{2\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$. Είναι $\varepsilon > 1$.

Αποδεικνύεται ότι: $\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$

Από τη σχέση αυτή καταλαβαίνουμε, ότι η εκκεντρότητα ε προσδιορίζει το συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\beta}{\alpha}$ της ασυμπτώτου της υπερβολής. Επομένως χαρακτηρίζει το ορθογώνιο βάσης και τη μορφή της υπερβολής.

Όταν η εκκεντρότητα ε τείνει στο 1, ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 0, επομένως το β τείνει στο 0. Τότε το ορθογώνιο βάσης γίνεται επίμηκες και η υπερβολή γίνεται "κλειστή".